Capitulo Cuarto
LAS ECUACIONES DE DIOFANTO

Contenido

1. Compra de una bufanda

Problema

Una bufanda cuesta 19 rublos, pero el comprador no tiene más que billetes de tres rublos; y la cajera, sólo de cinco. ¿Puede en estas condiciones abonarse el importe de la compra, y cómo hacerlo?

La misión de este problema se reduce a saber cuántos billetes de tres rublos deben entregarse a la cajera para que ella dé las vueltas con billetes de cinco, cobrando los 19 rublos. Las incógnitas del problema son dos: el número de billetes de tres rublos (x) y el número de billetes de cinco (y). Sólo puede plantearse una ecuación:

$$3x - 5y = 19$$

Aunque una ecuación con dos incógnitas tiene infinidad de soluciones, esto no quiere decir que entre ellas haya alguna en las que x e y sean números enteros y positivos (recordemos que se trata del número de billetes de banco). He aquí por qué el álgebra ha elaborado el método de solución de estas ecuaciones "indeterminadas". El mérito de haberlas introducido en el álgebra pertenece al primer sabio europeo que cultivó esta ciencia, a Diofanto, célebre matemático de la antigüedad, por lo que estas ecuaciones se llaman con frecuencia "ecuaciones de Diofanto".

Solución

En el ejemplo citado mostremos cómo deben resolverse tales ecuaciones. Hay que hallar el valor de x y de y en la ecuación

$$3x - 5y = 19$$

sin olvidar que tanto x cómo y son números enteros y positivos. Despejando la incógnita cuyo coeficiente es menor, es decir, 3x tendremos:

$$3x = 19 + 5y$$

de donde

$$x = (19 + 5y) / 3 = 6 + y + (1 + 2y) / 3$$

Como x, 6 e y son números enteros, la ecuación puede ser acertada sólo en el caso de que (1 + 2y) / 3 sea también un número entero. Expresémosle con la letra t. Entonces

$$x = 6 + y + t,$$

donde

$$t = (1 + 2y) / 3$$

y, por tanto,

$$3t = 1 + 2y\ ,\ 2y = 3t - 1$$

De la última ecuación despejaremos la y

$$y = (3t - 1) / 2 = + (t - 1) / 2$$

Comoquiera que *y* y *t* son números enteros, (t - 1) / 2 debe ser un número entero t_1. Por consiguiente,

$$y = t + t_1$$

y, además,

$$t_1 = (t - 1) / 2$$

de donde

$$2t_1 = t - 1$$
$$t = 2t_1 + 1$$

Sustituyamos el valor de $t = 2t_1 + 1$ en las igualdades anteriores:

$$y = t + t_l = 2t_1 + 1 + t_l = 3t_1 + 1$$

$$x = 6 + y + t = 6 + (3t_l\ a - 1) + (2t_1 + 1) = 8 + 5t_1$$

De esta forma hemos encontrado la expresión para x y para y

$$x = 8 + 5t_1$$
$$y = 1 + 3t_1$$

Es sabido que x e y son enteros y además positivos, es decir, mayores que 0; por lo tanto,

$$8 + 5t_1 > 0$$
$$1 + 3t_1 > 0$$

De estas desigualdades resulta que

$$5t_1 > -8 \text{ y } t_l > -8/5$$
$$3t_1 > -1 \text{ y } t_l > -1/3$$

Con esto el valor t_l está acotado.
De aquí que la magnitud t_l es mayor que - 1 / 3, (y claro, mucho mayor que - 8 / 5). Mas, como t_l es un número entero, se deduce que puede tener tan sólo los siguientes valores:

$$t_l = 0, 1, 2, 3, 4, ...$$

Los valores correspondientes de x y de y son:

$$x = 8 + 5t_1 = 8, 13, 18, 23, ...$$
$$y = 1 + 3t_1 = 1, 4, 7, 10, ...$$

Veamos ahora de qué manera puede efectuarse el pago: o bien se entregan 8 billetes de 3 rublos, recibiendo de vuelta uno de cinco:

$$8 - 3 - 5 = 19$$

o se entregan 13 billetes de 3 rublos, recibiendo de vuelta 4 billetes de 5 rublos:

$$13 * 3 - 4 * 5 = 19$$

Teóricamente, este problema tiene infinidad de soluciones, pero en la práctica su número es limitado, por cuanto ni el comprador, ni la cajera tienen una cantidad ilimitada de billetes de banco. Si cada uno dispone, por ejemplo, de 10 billetes, el pago puede efectuarse sólo de una forma: entregando 8 billetes de 3 y recibiendo uno de 5. Como vemos, en la práctica las ecuaciones indeterminadas pueden dar soluciones determinadas
Volviendo a nuestro problema, proponemos al lector que, en calidad de ejercicio, resuelva por su cuenta una de las variantes: concretamente, examinar el caso en que el comprador no tenga más que billetes de 5 rublos, y la cajera, sólo de 3. En este caso aparecen las siguientes soluciones:

$$x = 5, 8, 11, ...$$
$$y = 2, 7, 12, ...$$

En efecto,

$$5 * 5 - 2 * 3 = 19$$
$$8 * 5 - 7 * 3 = 19$$
$$11 * 5 - 12 * 3 = 19$$

Podríamos obtener también estos resultados al tomar las soluciones del problema central mediante un sencillo procedimiento algebraico. Puesto que entregar billetes de cinco rublos y recibir de tres rublos equivale a "recibir billetes negativos de cinco rublos" y "dar billetes negativos de 3 rublos", la nueva variante del problema se resuelve con la ecuación planteada en el problema central:

$$3x - 5y = 19$$

pero con la condición de que x e y sean números negativos. Por eso, de las igualdades

$$x = 8 + 5t_1$$
$$y = 1 + 3t_1$$

sabiendo que $x < 0$ e $y < 0$, deducimos:

$$8 + 5t_1 < 0$$
$$1 + 3t_1 < 0$$

y, por consiguiente,

$$t_1 < - 8 / 5$$

Tomando $t_1 = - 2, - 3, - 4$, etc., obtenemos de las fórmulas anteriores, los siguientes valores para x e y

$$\begin{array}{rrr} t_1 = -2 & -3 & -4 \\ x = -2 & -7 & -12 \\ y = -5 & -8 & -11 \end{array}$$

El primer par de soluciones, $x = - 2$, $y = - 5$, significa que el comprador "paga menos dos billetes de tres rublos" y "recibe menos cinco billetes de cinco", es decir, traducido al idioma común, quiere decir que paga con cinco billetes de a cinco, recibiendo como vuelta 2 billetes de a tres. De esta misma manera interpretaremos también las demás soluciones.
Volver

2. Una revisión en la tienda
Problema
Al revisar los libros de contabilidad de la tienda, uno de ellos apareció con borrones de tinta, presentando este aspecto:

Figura 11

No era posible descifrar el número de metros vendidos, pero no cabía duda de que éste no era un decimal. En el importe de la venta podían distinguirse sólo las tres últimas cifras y establecer que, delante de éstas, había otras tres. ¿Podía la comisión revisora averiguar qué cifras eran las del libro auxiliar, valiéndose tan sólo de estos datos?

Solución
Representemos el número de metros con la x y el importe de la venta, expresado en kopeks, con el número 4.936 x.
Las tres cifras cubiertas por el borrón las expresamos con una y. Esto, sin duda, expresa la cantidad de millares de kopeks; y toda la suma de kopeks será:

$$1.000y + 728.$$

Tenemos la ecuación
$4.936x = 1.000y + 728$. Después de dividir los dos miembros de la igualdad por 8, resulta

$$617x - 125y = 91$$

En esta ecuación, los números x e y son enteros y, además, y no es superior a 999, por cuanto no puede tener más de tres cifras. Resolvamos la ecuación como indicamos antes:

$$125y = 617x - 91$$

$$y = 5x - 1 + (34 - 8x) / 125 = 5x - 1 + 2(17 - 4x) / 125 = 5x - 1 + 2t$$

(Aquí hemos tomado 617 / 125 = 5 - 8 / 125, ya que nos conviene que haya el menor residuo posible. El quebrado

$$2(17 - 4x) / 125$$

es un número entero, y como 2 no se divide por 125, (17 - 4x) / 125, x debe ser un número entero, que representaremos con la t. Después, de la ecuación

$$(17 - 4x) / 125 = t$$

se obtiene

$$17 - 4x = 125t$$

$$x = 4 - 31t + (1 - t) / 4 = 4 - 31t + t_1$$

donde

$$t_1 = (1 - t) / 4$$

por lo tanto

$$4t_1 = 1 - t$$

$$t = 1 - 4t_1$$
$$x = 125t_1 – 27$$
$$y = 617t_1 - 134$$[1].

Se sabe que

$$100 [y< 1000$$

Por consiguiente

$$100 [617t_1 - 134 < 1000,$$

de donde

$$t_l / 234 / 617 \text{ y } t_l = 1134 / 617$$

Es evidente que para t_l existe solamente un valor entero:

$$t_l = 1,$$

de donde x = 98, y = 483; es decir, fueron vendidos 98 metros por una suma total de 4.837 rublos 28 kopeks. E1 libro auxiliar, pues, ha sido restablecido.

Volver

3. Compra de sellos de correos

Problema

Se dispone de 1 rublo para comprar 40 sellos de correos: de 1, 4 y 12 kopeks. ¿Cuántos sellos de cada uno de estos precios deberán comprarse?

Solución

En este caso tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$x + 4y + 12z = 100,$$
$$x + y + z = 40,$$

donde x es el número de sellos de 1 kopeks; y, el de 4 kopeks, y z, el de 12 kopeks. Restando de la primera ecuación la segunda, obtendremos una ecuación con dos incógnitas:

$$3y + llz = 60$$

Despejemos la y:

$$y = 20 - 11 * z / 3$$

Es evidente que 3 es un número entero. Indiquémosle con la t. Tenemos:

$$Y = 20 - 11t$$
$$z = 3t$$

Sustituyamos la y y la z en la segunda de las ecuaciones iniciales:

[1] Obsérvese que los coeficientes de ti son iguales a los de x e y en la ecuación inicial 617x - 125y = 91, además, uno de los coeficientes de tl tiene el signo contrario. Esto no es fortuito: puede demostrarse que debe suceder así siempre que los coeficientes de x y de y sean primos entre sí.

$$X + 20 - 11t + 3t = 40;$$

de aquí que

$$x = 20 + 8t$$

Como x / 0, y / 0 y z / 0, no es difícil establecer los límites de t:

O [t [l 9 / 11

de donde se deduce que para t son posibles sólo dos valores enteros: t = 0 y t = 1.
Los valores correspondientes de x, y y z son:

t =	0	1
x =	20	28
y =	20	9
z =	0	3

Prueba:

y = 20 * 1 + 20 * 4 + 0 * 12 = 100
z = 28 * 1 + 9 * 4 + 3 * 12 = 100

En la compra de sellos, como vemos, son posibles dos variantes (si van a exigir que se compre aunque sea un solo sello de cada
valor, es posible una sola variante).
Pasemos al segundo problema de este mismo tipo.
Volver

4. Compra de frutas
Problema
Por 5 rublos se compraron 100 unidades de diferentes frutas. Sus precios son los siguientes:

sandía	*50 kopeks cada una*
manzanas	*10 kopeks cada una*
ciruelas	*1 kopeks cada una*

¿Cuánta fruta de cada clase fue comprada?

Solución
Indicando el número de sandías con la x, el de las manzanas con la y y el de las ciruelas con la z, establezcamos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 50x + 10y + 1z = 500 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Restando de la primera ecuación la segunda, obtendremos una ecuación con dos incógnitas

$$49x + 9y = 400.$$

El ulterior desarrollo del problema será el siguiente:

$$y = \frac{400 - 9x}{9} = 44 - 5x + \frac{4(1 - x)}{9} = 44 - 5x + 4t$$

$$t = \frac{1 - x}{9} \Rightarrow x = 1 - 9t$$

$$y = 77 - 5(1 - 9t) + 4t = 39 + 49t$$

De las desigualdades

1 - 9t / 0 y 39 + 49 t/ 0

se deduce que

1 / 9 / t / - 39 / 49

por consiguiente, t = 0. Por eso.

x = 1, y = 39.

Sustituyendo los valores de x y de y en la segunda ecuación, deduciremos que z = 60.
Se compraron 1 sandía, 39 manzanas y 60 ciruelas.
Sólo cabe esta combinación.
Volver

5. Adivinar el día de nacimiento.
Problema
Las ecuaciones indeterminadas permiten efectuar el siguiente truco matemático. Se propone a una persona que multiplique la fecha del día de su nacimiento por 12, y el número del mes, por 31. Con la suma de los productos de esos datos puede calcularse la fecha del nacimiento de la persona dada. Si por ejemplo nació el 9 de febrero, se efectuarán las siguientes operaciones:

*9 * 12 = 108 , 2 * 31 = 62 , 108 + 62 = 170.*

¿Cómo se deducirá el día del nacimiento conociendo esa suma?

Solución
La tarea se reduce a resolver la ecuación indeterminada

$$12x + 31y = 170$$

en la que los valores de las incógnitas deben ser enteros y positivos; además, la fecha del mes, *x*, no es superior a 31, y el número del mes, *y*, no pasa de 12

$$x = \frac{170 - 31y}{12} = 14 - 3y + \frac{2 + 5y}{12} = 14 - 3y + t$$

$$2 + 5y = 12t$$

$$y = \frac{-2 + 12t}{5} = 2t - 2 * \frac{1 - t}{5} = 2t - 2t_1$$

$$1 - t = 5t_1, \; t = 1 - 5t_1$$

$$y = 2 * (1 - 5t_1) - 2t_1 = 2 - 12t_1$$

$$x = 14 - 3 * (2 - 12t_1) + 1 - 5t_1 = 9 + 31t_1$$

Se sabe que 31 / x > 0 y 12 / y > 0, por lo que los límites para t_1:

$$-9 / 31 < t_1 < 1 / 6 .$$

Por lo tanto,

$$t_1 = 0, \; x = 9, \; y = 2$$

La fecha de nacimiento es el día 9 del segundo mes, es decir, el 9 de febrero. Se puede proponer otra solución que no exige el empleo de ecuaciones. Nos han dicho la cifra *a = 12x + 31y*. Puesto que *12x + 24y* se divide entre 12, en este caso los números *7y* y *a*, después de ser divididos entre 12, tienen restas iguales. Al multiplicar por 7 resulta que *49y* y *7a*, después de ser divididos entre 12, tienen restas iguales. Pero *49y = 48y + y*, y *48y* se divide entre 12. Resulta que *y* y *7a* al ser divididos entre 12 tienen restas iguales.
Con otras palabras, si a no se divide entre 12, en este caso y es igual a la resta de la división del número *7a* entre 12; pero si a se divide entre 12, entonces *y = 12*. Este número *y* (número del mes) se determina enteramente. Sabiendo *y* ya es muy fácil determinar *x*.
Un pequeño consejo: antes de determinar la resta de la división del número *7a* entre 12, cambie el mismo número a por su resta de la división entre 12 - será más fácil calcular. Por ejemplo, si a = 170, Ud. tiene que efectuar mentalmente los siguientes cálculos:

170 = 12 14 + 2 (entonces la resta es 2)

2 * 7 = 14; 14 = 12 * 1 + 2 (entonces *y* = 2)

$$x' = \frac{170 - 31y}{12} = \frac{170 - 31 * 2}{12} = \frac{180}{12} = 9$$

entonces

$$x = 9$$

Ahora Ud. puede comunicar que la fecha del nacimiento es el 9 de febrero. Demostremos que el truco nunca falla, es decir, que la ecuación tiene siempre una sola solución, siendo sus valores enteros y positivos. Representemos por *a* el número que se nos comunica. En este caso, la fecha del nacimiento vendrá expresada por la ecuación

$$12x + 31y = a.$$

Razonemos "por reducción al absurdo". Supongamos que esta ecuación tiene dos soluciones diferentes enteras y positivas, concretamente: la solución x_1, y_1 y la solución x_2, y_2; además, tanto x_1 como x_2 no son superiores a 31; y_1 y y_2 tampoco son mayores que 12. Tenemos:

$$12x_1 + 31y_1 = a$$
$$12x_2 + 31y_2 = a$$

.

Restando la segunda ecuación de la primera, tendremos:

$$12 (x_l - x_2) + 31 (y_1 - y_2) = 0.$$

De esta igualdad se desprende que el número $12(x_1 - x_2)$ es divisible por 31. Como x_1 y x_2, son números positivos que no superan 31, su diferencia, $x_1 – x_2$ es una magnitud menor que 31. Por eso, el número $12(x_1\ x_2)$ puede dividirse por 31 sólo cuando $x_1 = x_2$, es decir, si la primera solución coincide con la segunda. De esta manera, la suposición de que existen dos soluciones diferentes conduce a una contradicción

Volver

6. Venta de pollos

Antiguo problema

Tres hermanas fueron a vender pollos al mercado. Una llevó 10 pollos; otra, 16, y la tercera, 26. Hasta el mediodía, las tres habían vendido al mismo precio una parte de los pollos. Después del mediodía, temiendo que no pudieran desprenderse de todos los pollos, bajaron el precio vendiendo los que les quedaban al mismo precio. Las tres hermanas regresaron a casa con igual cantidad de dinero, obtenida de la venta de las aves, con 35 rublos cada una. ¿A qué precio vendieron los pollos antes y después del mediodía?

Solución

Representemos el número de pollos vendidos por cada una de las hermanas hasta el mediodía con *x*, *y* y *z*. Después del mediodía vendieron 10 - *x*, 16 - *y* y 26 - *z* pollos. E1 precio que rigió por la mañana lo expresamos con *m*, y el de la tarde, con **n**. Para mayor claridad confrontemos estas expresiones:

	Número de pollos vendidos			Precio
Hasta el mediodía	x	y	z	m
Después del mediodía	$10 - x$	$16 - y$	$26 – z$	n

La primera hermana obtuvo:

$$mx + n (10 - x);\ \text{por consiguiente,}\ mx + n (10 – x) = 35$$

la segunda:

$$my + n\,(16 - y);\ \text{por lo tanto,}\ my - r - n\,(16 - y) = 35$$

la tercera:

$$mz + n\,(26 - z);\ \text{de aquí que,}\ mz + n\,(26 - z) = 35.$$

Transformemos estas tres ecuaciones:

$$\begin{cases}(m-n)x + 10n = 35\\(m-n)y + 16n = 35\\(m-n)z + 26n = 35\end{cases}$$

Restando de la tercera ecuación la primera, y después la segunda, obtendremos sucesivamente:

$$\begin{cases}(m-n)(z-x) + 16n = 0\\(m-n)(z-y) + 10n = 0\end{cases}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{cases}(m-n)(x-z) = 16n\\(m-n)(y-z) = 10n\end{cases}$$

Dividimos la primera por la segunda:

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5}$$

Como x, y, z son números enteros, las diferencias $x - z$, $y - z$ son también números enteros. Por esta razón, para que se produzca la igualdad

$$\frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5}$$

es preciso que $x - z$ se divida por 8, e $y - z$, por 5. Por lo tanto,

$$\frac{x-z}{8} = t = \frac{y-z}{5}$$

de donde

$$x = z + 8t$$
$$y = z + 5t$$

Observemos que el número t, además de entero, es también positivo, por cuanto $x > z$ (en caso contrario, la primera hermana no hubiera podido conseguir tanto dinero como la tercera). Como $x < 10$.

$$z + 8t < 10.$$

Al ser z y t números enteros y positivos, la última desigualdad puede ser satisfecha sólo en el caso en que $z = 1$ y $t = 1$. Sustituyendo estos valores en

$$x = z + 8t$$
$$y = z + 5t$$

resulta que $x = 9$, $y = 6$.

Si en las ecuaciones

$$mx + n\,(10 - x) = 35,$$
$$my + n\,(16 - y) = 35,$$
$$mz + n\,(26 - z) = 35$$

sustituimos los valores de x, y, y z, ya conocidos, tendremos el precio por el que han sido vendidos los polluelos:

$$m = 3\ ¾ \text{ rublos y } n = 1\ ¼ \text{ rublos}$$

Hasta el mediodía, los polluelos fueron vendidos, como hemos visto, a 3 rublos 75 kopeks; después del mediodía, a 1 rublo 25 kopeks.

Volver

7. Dos números y cuatro operaciones

Problema

El problema anterior, resuelto mediante un sistema de tres ecuaciones con cinco incógnitas, no se ha desarrollado por los procedimientos ordinarios, sino por un razonamiento matemático libre. De esta misma forma resolveremos los siguientes problemas, y se reducen a ecuaciones indeterminadas de segundo grado.

He aquí el primero de ellos.

Con dos números enteros y positivos fueron realizadas las cuatro operaciones siguientes:

1) los sumaron
2) restaron el menor del mayor,
3) los multiplicaron
4) dividieron el mayor por el menor.

La suma de los resultados obtenidos fue 243. Hállense esos dos números.

Solución

Si el número mayor es x, y el menor y,

$$(x + y) + (x - y) + xy + x / y = 243$$

Si se multiplica esta ecuación por y, se abren los paréntesis y se reducen los términos semejantes, tendremos:

$$x(2y + y^2 + 1) = 243y$$

Pero

$$2y + y^2 + 1 = (y + 1)^2$$

Por eso

$$x = \frac{243y}{(x+1)^2}$$

Para que el número x sea entero, es preciso que el denominador $(y + 1)^2$ sea uno de los divisores de 243 (por cuanto y no puede tener factores comunes con $y + 1$). Sabiendo que 243 = 3^5, se deduce que 243 es divisible sólo por los números siguientes, que son cuadrados: 1, 3^2 9^2. Así pues, $(y + l)^2$ debe ser igual a 1, 32 o 91. Puesto que y debe ser un número positivo, resulta que *y* es 8 ó 2.
Entonces *x* será igual a

$$243 * 8 / 81 \text{ ó }, 243 * 2 / 9$$

Los números buscados, por lo tanto, serán 24 y 8 ó 54 y 2.
Volver

8. Cómo será el rectángulo
Problema
Los lados de un rectángulo vienen dados por números enteros. ¿Cuál será la longitud de dichos lados para que el perímetro y la superficie de esta figura se expresen con los mismos números?

Solución.
Representando los lados del rectángulo con *x* e *y* tendremos la ecuación

$$2x + 2y = xy$$

de donde

$$x = \frac{2y}{y-2}$$

Como *x* e *y* deben ser números positivos, también lo será el numero *y - 2*, es decir, *y* debe ser mayor que 2.
Fijémonos ahora en que

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y-2)+4}{} y-2 = 2 + \frac{4}{y-2}$$

Como *x* tiene que ser un número entero, $\frac{4}{y-2}$, también lo será. Pero como *y > 2*, sólo se satisfacen las condiciones del problema si *y* es igual a 3, 4 o 6.

El valor correspondiente de *x* será 6, 4 ó 3.
Vemos, pues, que la figura buscada será un rectángulo cuyos lados equivaldrán a 3 y 6, o un cuadrado de lado 4.
Volver

9. Dos números de dos cifras

Problema
Los números 46 y 96 tienen una curiosa propiedad: su producto no se altera aunque las cifras que los componen cambien de lugar. En efecto,

$$46 * 96 = 4416 = 64 * 69$$

¿Cómo podrá averiguarse si existen otros números de dos cifras con idéntica propiedad?

Solución
Representando las cifras de los números buscados con *x, y, z, t*, tendremos la ecuación

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + x)(10t + z)$$

Abriendo los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, se obtiene

$$xz = yt$$

donde *x, y, z, y t* son números enteros menores que 10. Para buscar la solución se forman con las nueve cifras significante todas las parejas que dan un mismo resultado:

1 * 4 = 2 * 2	1 * 9 = 3 * 3	2 * 9 = 3 * 6
1 * 6 = 2 * 3	1 * 4 = 2 * 2	3 * 8 = 4 * 6
1 * 8 = 2 * 4	2 * 6 = 3 * 4	4 * 9 = 6 * 6

Las igualdades son en total 9. De cada una de ellas puede formarse uno o dos grupos de las cifras buscadas. Por ejemplo, de la igualdad 1 * 4 = 2 * 2 se obtiene

12 * 42 = 21 * 24

De la igualdad 1 * 6 = 2 * 3 hallarnos dos soluciones:

12 * 63 = 21 * 36, 13 * 62 = 31 * 26

Siguiendo el mismo procedimiento encontraremos las siguientes 14, soluciones:

12 * 42 = 21 * 24	23 * 96 = 32 * 69
12 * 63 = 21 * 36	24 * 63 = 42 * 36
12 * 84 = 21 * 48	24 * 84 = 42 * 48
13 * 62 = 31 * 26	26 * 93 = 62 * 39

13 * 93 = 31 * 39	34 * 86 = 43 * 68
14 * 82 = 41 * 28	36 * 84 = 63 * 48
23 * 64 = 32 * 46	46 * 96 = 64 * 69

Volver

10. Los números de Pitágoras

El fácil y exacto método que los agrimensores emplean para trazar líneas perpendiculares sobre el terreno consiste en lo siguiente.

Supongamos que por el punto A hay que trazar una perpendicular a MN (fig. 12).

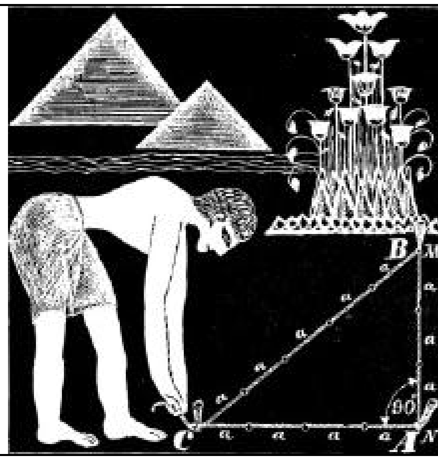

Figura 12

En dirección AM, desde el punto A se señala tres veces la distancia cualquiera (a). Después, en una cuerda se hacen tres nudos separados por una distancia igual a *4a* y *5a*. Colocando los nudos extremos en los puntos A y B, se tira del nudo del medio. Con ello se forma un triángulo en el que el ángulo A es recto.

Este antiguo método, empleado ya hace miles de años por los constructores de las pirámides egipcias, se basa en que los triángulos, en los que la relación de sus lados sea 3 : 4 : 5, de acuerdo con el conocido teorema de Pitágoras serán rectángulos por cuanto

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Además de los números 3, 4 y 5 existe, como se sabe, infinidad de números enteros y positivos *a, b, c* que satisfacen la correlación

$$a^2 + b^2 = c^2$$

y reciben la denominación de números de Pitágoras. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, estos números pueden expresar la longitud de los lados de un triángulo rectángulo. Los lados *a y b* serán dos "catetos" y *c* la "hipotenusa".

Es evidente que si *a, b, c* son un trío de números de Pitágoras, los números *pa, pb, pc* (donde p es un factor entero) serán también números de Pitágoras. Y al contrario, si los números de Pitágoras

tienen un factor común, pueden ser simplificados por éste, obteniéndose de nuevo el grupo de números de Pitágoras. Por eso, para empezar analicemos tres números pitagóricos que sean primos entre sí (los demás se hallan multiplicándolos por el factor entero p).
Mostremos que uno de los "catetos" de los números *a, b, c* debe ser número par, y el otro, impar. Razonemos partiendo de la reducción al "absurdo". Si los dos "catetos" *a* y *b* son pares, también lo será la suma $a^2 + b^2$ y, por lo tanto, lo mismo sucederá con la "hipotenusa". Sin embargo, esto contradice el hecho de que los números *a, b, c* no tienen un factor común ya que 2 divide exactamente a tres números pares. Por consiguiente, por lo menos uno de los "catetos", *a, b* tiene que ser impar.
Puede ofrecerse otra variante, que ambos "catetos" sean impares y la "hipotenusa", par. No es difícil demostrar que esto es imposible. En efecto. Si los "catetos tienen la forma

$$2x + 1 \text{ y } 2y + 1$$

la suma de sus cuadrados será igual a

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4(x^2 + x + y^2 + y) + 2$$

es decir, se trata de un número que al ser divido por 4 da de residuo 2. En tanto que el cuadrado de cualquier número par debe dividirse por 4 sin residuo. Por consiguiente, la suma de los cuadrados de dos números impares no puede ser el cuadrado de un número par; en otras palabras: nuestros tres números no son pitagóricos.
Así, pues, de los "catetos" *a, b* uno es par y otro impar. Por eso, el número $a^2 + b^2$ es impar y, en consecuencia, también lo será la "hipotenusa" c.
Supongamos, para mayor precisión, que *a* es el "cateto" impar y *b* el par.
De la igualdad

$$a^2 + b^2 = c^2$$

obtenemos fácilmente:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

Los factores $c + b$ y $c - b$ son primos entre sí. Efectivamente. Si estos números tuvieran algún factor común primo, excepción hecha de la unidad, entonces también se dividiría por dicho factor su suma

$$(c + b) + (c - b) = 2c,$$

su diferencia

$$(c + b) - (c - b) = 2b,$$

y su producto

$$(c + b)(c - b) = a^2,$$

es decir, los números *2c*, *2b* y *a* tendrían un factor común. Como a es impar este factor no puede ser 2, y por eso, los números *a*, *b* y *c* tienen este factor común, lo que, sin embargo, es imposible. La contradicción obtenida demuestra que los números $c + b$ y $c - b$ son primos entre sí. Pero si el producto de dos números primos entre sí es un cuadrado, entonces, cada uno de ellos será un cuadrado, es decir,

$$\begin{cases} c+b=m^2 \\ c-b=n^2 \end{cases}$$

Al resolver este sistema hallamos

$$c=\frac{m^2+n^2}{2}, b=\frac{m^2-n^2}{2}$$

$$a^2 = (c + b)(c - b) = m^2 * n^2, a = mn$$

De aquí que los números de Pitágoras examinados se representen así:

$$a=mn, b=\frac{m^2-n^2}{2}, c=\frac{m^2+n^2}{2}$$

donde m y n son números impares primos entre sí. El lector puede convencerse fácilmente de lo contrario: las fórmulas citadas, con cualesquiera números m y n impares, dan los números pitagóricos *a, b, c*. He aquí algunos grupos de números pitagóricos, obtenidos con diferentes valores de m y n:

cuando	m = 3	n = 1	$3^2 + 4^2 = 5^2$
“	m = 5	n = 1	$5^2 + 12^2 = 13^2$
“	m = 7	n = 1	$7^2 + 24^2 = 25^2$
“	m = 9	n = 1	$9^2 + 40^2 = 41^2$
“	m = 11	n = 1	$11^2 + 60^2 = 61^2$
“	m = 13	n = 1	$13^2 + 84^2 = 85^2$
“	m = 5	n = 3	$15^2 + 8^2 = 17^2$
“	m = 7	n = 3	$21^2 + 20^2 = 29^2$
“	m = 11	n = 3	$33^2 + 56^2 = 65^2$
“	m = 13	n = 3	$39^2 + 80^2 = 89^2$
“	m = 7	n = 5	$35^2 + 12^2 = 37^2$
“	m = 9	n = 5	$45^2 + 28^2 = 53^2$
“	m = 11	n = 5	$55^2 + 48^2 = 73^2$
“	m = 13	n = 5	$65^2 + 72^2 = 97^2$
“	m = 9	n = 7	$63^2 + 16^2 = 65^2$
“	m =	n = 7	$77^2 + 36^2 = 85^2$

(Todos los demás grupos de tres números pitagóricos, o tienen factores comunes, o contienen números mayores de 100).
Los números de Pitágoras tienen, en general, propiedades curiosas que enumeraremos a continuación sin demostraciones:

1) Uno de los "catetos" debe ser múltiplo de tres.
2) Uno de los "catetos" debe ser múltiplo de cuatro.
3) Uno de los números de Pitágoras debe ser múltiplo de cinco

El lector puede convencerse de la existencia de estas propiedades al examinar los ejemplos de grupos de cifras pitagóricas que figuran más arriba.
Volver

11. Ecuación indeterminada de tercer grado
La suma de los cubos de tres números enteros puede ser el cubo de un cuarto número. Por ejemplo,

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Esto significa, entre otras cosas, que el cubo, cuya arista es igual a 6 cm equivale a la suma de los volúmenes de tres cubos, en los que sus aristas sean 3, 4 y 5 cm (fig. 13). Según cuentan, esta correlación interesó vivamente a Platón.
Intentemos hallar otras correlaciones del mismo género, es decir, resolvamos la siguiente tarea: encontrar soluciones a la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3.$$

Es más cómodo, sin embargo, expresar la incógnita *u* con - *t*. Entonces la ecuación ofrecerá una forma más sencilla:

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^2 = 0$$

Veamos un método que nos permita hallar multitud de soluciones a esta ecuación, en números enteros (positivos y negativos). Supongamos que *a, b, c, d* y a, ß, ?, d son dos grupos de cuatro números que satisfacen la ecuación. Sumemos a los números del primer grupo de cuatro los del segundo multiplicados por un cierto número *k*, y busquemos éste de forma que los números obtenidos

$$a + ka, b + kß, c + k?, d + kd,$$

satisfagan también la ecuación. En otras palabras: elijamos k de tal forma que sea satisfecha la igualdad

$$(a + ka)^3 + (b + kß)^3 + (c + k?)^3 + (d + kd)^3 = 0.$$

Al abrir los paréntesis, sin olvidar que a, b, c, d y a, ß, ?, d satisfacen las exigencias de nuestra ecuación, es decir, que tienen lugar las igualdades

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0,$$

$$a^3 + ß^3 + ?^3 + d^3 = 0$$

obtenemos:

$$3a^2ka + 3ak^2a^2 + 3b^2kß + 3bk^2ß^2 + 3c^2k? + 3ck^2?^2 + 3d^2kd + 3dk^2d^2 = 0,$$

ó

$$3k[(a^2a + b^2ß + c^2? + d^2d) + k(aa^2 + bß^2 + c?^2 + dd^2)] = 0$$

El producto será cero sólo en el caso en que lo sea uno de sus factores. Equiparando cada uno de los factores a cero obtenemos dos valores para *k*. El primero de ellos $k = 0$, no nos satisface; ello significa que si a los números *a, b, c* y *d* no se les agrega nada, los números obtenidos satisfacen nuestra ecuación. Por eso tomaremos solamente el segundo valor de k:

$$k = \frac{a^2 a + b^2 b + c^2 g + d^2 d}{aa^2 + bb^2 + cg^2 + dd^2}$$

De aquí que, conociendo dos grupos de cuatro números que satisfagan la ecuación de partida, puede ser hallado un nuevo grupo: para esto hay que sumar a los números del primer cuarteto los del segundo multiplicados por *k*, donde *k* tiene el valor indicado más arriba.
Para aplicar este método es preciso encontrar dos grupos de cuatro números que satisfagan las condiciones de la ecuación inicial. Uno de ellos (3, 4, 5, - 6) es ya conocido. ¿De dónde sacar otro? No es difícil encontrar salida a esta situación; el grupo pueden formarlo los números *r, - r, s, - s*, que responden, sin duda, a las condiciones de la ecuación inicial. En otras palabras, supongamos que

a = 3, b = 4, c = 5, d = - 6,
a = r, ß = - r, ? = s, d = - s.

Entonces *k*, tomará la siguiente forma:

$$k = -\frac{-7r - 11s}{7r^2 - s^2} = \frac{7r + 11s}{7r^2 - s^2}$$

y los números $a + ka$, $b + kß$, $c + k?$, $d + kd$ serán respectivamente iguales a

$$\frac{28r^2 + 11rs - 3s^2}{7r^2 - s^2}$$

$$\frac{21r^2 - 11rs - 4s^2}{7r^2 - s^2}$$

$$\frac{35r^2 + 7rs + 6s^2}{7r^2 - s^2}$$

$$\frac{-42r^2 - 7rs - 5s^2}{7r^2 - s^2}$$

De acuerdo con lo expuesto estas cuatro expresiones satisfacen las exigencias de la ecuación de partida

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^2 = 0$$

Comoquiera que esos quebrados tienen el mismo denominador, puede prescindirse de éste. (En consecuencia, los numeradores de estos quebrados también satisfacen las exigencias de la ecuación examinada.) Se ha visto, pues, que la ecuación indicada es satisfecha (cualquiera que sea el significado de *r* y *s*) por los siguientes números:

$$x = 28r^2 + 11\,rs - 3s^2$$
$$y = 21r^2 - 11rs - 4s^2$$
$$z = 35r^2 + 7rs + 6s^2$$
$$t = -42r^2 - 7rs - 5s^2,$$

lo cual puede comprobarse elevando estas expresiones al cubo y sumándolas. Atribuyendo a *r* y *s* diversos valores enteros podemos obtener toda una serie de soluciones a la ecuación expresadas en números enteros. Si en estas circunstancias los números obtenidos tienen un factor común, podemos dividir por él todos estos números. Por ejemplo, cuando r = l, s = l, las incógnitas *x, y, z, t* equivaldrán a 36, 6, 48, - 54, o, que al dividirlos por 6, darán 6, 1, 8, - 9. Por consiguiente,

63 + 13 + 83 = 93.

He aquí una serie más de igualdades del mismo tipo (obtenidas después de simplificadas al ser divididas por un divisor común):

Cuando	$r = 1$	$s = 2$	$38^3 + 73^3 = 17^3 + 76^3$
“	$r = 1$	$s = 3$	$17^3 + 55^3 = 24^3 + 54^3$
“	$r = l$	$s = 5$	$4^3 + 110^3 = 67^3 + 101^3$
“	$r = 1$	$s = 4$	$8^3 + 53^3 = 29^3 + 50^3$
“	$r = l$	$s = - 1$	$7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$
“	$r = l$	$s = - 2$	$2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$
“	$r = 2$	$s = - 1$	$29^3 + 34^3 + 44^3 = 533$

Observemos que si en el grupo inicial 3, 4, 5, - 6, o en alguno de los obtenidos después, se cambian de sitio los números y se aplica el mismo método, obtendremos una nueva serie de soluciones. Por ejemplo, tomando decir, suponiendo que *a = 3, b = 5, c = 4,* d = - 6) *z, t,* los valores

$$x = 20r^2 + 10rs - 3s^2$$
$$y = 12r^2 - 10rs - 5s^2$$
$$z = 16r^2 + 8rs + 6s^2$$
$$t = -24r^2 - 8rs - 4s^2$$

De aquí que al variar los valores de r *y* s obtengamos una serie de nuevas correlaciones:

cuando	r = l,	s = l	$9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$
“	r = 1,	s = 3	$23^3 + 94^3 = 63^3 + 84^3$
“	r = 1,	s = 5	$5^3 + 163^3 + 164^3 = 206^3$
“	r = 1,	s = 6	$7^3 + 54^3 + 57^3 = 70^3$
“	r = 2,	s = l	$23^3 + 97^3 + 86^3 = 116^3$
“	r = l,	s = - 3	$3^3 + 36^3 + 37^3 = 46^3$
etc			

De esta manera puede obtenerse un número infinito de soluciones de la ecuación dada.
Volver

12. Cien mil marcos por la demostración de un teorema

Cierto problema de ecuaciones indeterminadas adquirió en sus tiempos enorme popularidad debido a que al afortunado que lo resolviera con acierto se le ofrecía todo un capital ¡100 000 marcos alemanes!

El ejercicio consiste en demostrar la siguiente tesis llamada teorema o “gran proposición" de Fermat.

La suma de potencias de idéntico grado de dos números enteros no puede ser potencia de un tercer número entero. Se excluye sólo la segunda potencia, para la que es posible.

En otras palabras, hay que demostrar que la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

no tiene solución, tratándose de base entera, para n > 2.

Aclaremos lo dicho. Hemos visto que las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

tienen, tratándose de números enteros, cuantas soluciones se deseen. Sin embargo será imposible encontrar tres números enteros positivos que satisfagan la igualdad $x^3 + y^3 = z^3$.

Idéntico fracaso acompaña cuando se trata de las potencias de cuarto, quinto, sexto grados, etc. Esto es lo que afirma la "gran proposición de Fermat".
¿Qué se exige de los aspirantes al premio? Deben demostrar esta tesis para todas las potencias que cumplen las condiciones dadas. El caso es que el teorema de Fermat no esta aún demostrado y pende, por decirlo así, en el aire.
Han transcurrido tres siglos desde que fue formulado, sin embargo, los matemáticos no han logrado hasta ahora hallar su demostración.
Las figuras más eximias de esta ciencia se han ocupado del problema, mas, en el mejor de los casos, [2]consiguieron demostrar el teorema para algunos exponentes o para ciertos grupos de ellos; pero de lo que se trata es de hallar la demostración g e n e r a 1, para t o d o exponente entero.
Lo interesante del caso es que esta inaccesible demostración del teorema de Fermat, por lo visto, fue descubierta en cierta ocasión, y después se extravió. El autor del teorema, el genial matemático del siglo XVII, Pierre de Fermat, afirmaba que conocía la demostración. Su "gran proposición", fue escrita por él (lo mismo que toda una serie de teoremas acerca de la teoría de los números) en forma de observación en los márgenes de una obra de Diofanto, acompañándola de las siguientes palabras:
"He encontrado una demostración verdaderamente asombrosa para esta proposición, pero aquí hay poco sitio para desarrollarla".
En ningún sitio, ni en los documentos del gran matemático ni en su correspondencia, ha sido posible hallar huellas de esta demostración.
Los discípulos de Fermat han tenido que marchar por su propio camino.
He aquí los resultados de estos esfuerzos: Euler (1797) demostrar; el teorema de Fermat para potencias de tercero y cuarto grados, para las de quinto fue demostrado por Legendre (1823); para las de séptimo[3], por Lamé y Lebesgue (1840). En 1849, Kummer demostró el teorema para una serie muy amplia de potencias y, entre otras, para todos los exponentes menores de ciento. Estos últimos trabajos rebasan con mucho la esfera de las matemáticas conocidas por Fermat, y empieza a ser problemático el hecho de que este último pudiera hallar la demostración general de su "gran proposición". Además es posible que él se equivocó.
Quien sienta curiosidad por la historia y el estado actual del problema de Fermat, puede leer el folleto de A. Jinchin *El gran teorema de Fermat.* Esta publicación, obra de un especialista, está dedicada a lectores que sólo tienen conocimientos elementales de matemáticas.
Volver

[2] *Fermat* (1603 - 1665) no era matemático profesional. Era jurista y consejero del parlamento; se dedicaba a las investigaciones matemáticas sólo en los momentos libres. No obstante, hizo una serie de descubrimientos extraordinarios, los cuales, dígase de paso, no publicaba, sino que, como se acostumbraba hacer en esa época, los daba a conocer en su correspondencia a los hombres de ciencia, amigos **suyos:** Pascal, Descartes, Huygens, Roberval y otros.
[3] Para los exponentes compuestos (a excepción del 4) no hace falta ninguna demostración especial: estos casos se reducen a los casos con exponentes primos